欧拉图相关的生成与计数问题探究

北京师范大学附属实验中学 陈通

摘 要

本文着重从生成与计数的角度对欧拉图相关的问题进行研究。介绍了欧拉图的判定方法、重要性质以及欧拉回路生成算法。在欧拉图性质的基础上，归纳了欧拉图生成问题的经典模型和转化方法，探究了欧拉图相关计数问题的一些思路，并给出了一些结论。

引 言

著名的哥尼斯堡七桥问题是18世纪著名的古典数学问题之一，该问题在相当长的时间里无人能解。欧拉经过研究，于1736年发表了论文《哥尼斯堡的七座桥》。这篇论文不仅圆满地回答了哥尼斯堡居民提出的问题，而且给出并证明了更为广泛的一般性结论。从那时起，图论作为数学的一个新的分支而诞生。因此，欧拉图问题是图论的起源，也是图论研究中十分重要的一部分。

在信息学竞赛中，图论考察的重点是生成问题与计数问题。而欧拉图因具有特殊性质而成为这类题目的基本模型之一。这类问题需要我们要根据欧拉图的特点归纳出针对的方法加以解决。我们将在本文中对欧拉图相关的生成与计数问题进行探究。

本文在第1节中，对一些基本概念给出了定义。在第2节中，介绍了欧拉图的判定方法。第3节中，介绍了欧拉回路构造算法以及扩展应用。第4节中，介绍了一些与欧拉图相关的常用结论与几类经典试题。在第5节中，介绍了欧拉图生成问题的一些模型与转化方法。在第6节中，介绍了一些与欧拉图相关的计数问题。在第7节中进行了总结。

1 基本概念

欧拉图问题是图论中的一类特殊的问题。在本文的介绍过程中，我们将会使用一些图论术语。为了使本文叙述准确，本节将给出一些术语的定义。

定义 1.1. 图 G 中与顶点 v 关联的边数（自环统计两次）称为图 G 中顶点 v 的**度**。特别地，对于有向图 G ，进入顶点 v 的边的条数称为顶点 v 的**入度**；从顶点v 引出的边的条数称为顶点 v 的**出度**。

定义 1.2. 图 G 中度为奇数的点称为**奇顶点**，度为偶数的点称为**偶顶点**，度为 0 的点称为**孤立点**。

定义 1.3. 对于无向图 G 中的两点 u 和 v，若存在 u 到 v 的路径，则称 u 和 v 是**连通**的。如果图 G 中任意两点都是连通的，则称图 G 为**连通图**。对于有向图 G，将所有的有向边替换为无向边得到图 G 的基图，若图 G 的基图是连通的，则称图 G 是**弱连通图**。

定义 1.4. 对于图 G 中边 e，若删去 e 后图 G 的连通分量的数量增加，则称边 e 为 G 的**桥**。

定义 1.5. 图 G 中一条**路径**指一个顶点与边的交替序列 $v_0, e_1, v_1, ..., e_m, v_m$，其中 e_i 为 v_{i-1} 到 v_i 的一条边。**回路**指满足 $v_0 = v_m$ 的一条路径，一般不区分起点。

定义 1.6. 图 G 中经过每条边恰一次的回路称为**欧拉回路**，经过每条边恰一次的路径称为**欧拉路径**。

定义 1.7. 存在欧拉回路的图称为**欧拉图**，存在欧拉路径但不存在欧拉回路的图称为**半欧拉图**。

定义 1.8. 不含平行边（也称重边）也不含自环的图称为**简单图**。

2 欧拉图的判定

2.1 无向欧拉图

一笔画问题是生活中常见的一类欧拉图问题，例如汉字 “日” 和 “中” 字都可一笔画，而 “田” 和 “目” 则不能。那么究竟具有什么性质的图可以一笔画出。画出一张图的最少笔画数又是多少。早在十八世纪，欧拉研究七桥问题时就提出了欧拉图问题的实质：

定理 2.1. 无孤立点的无向图 G 为欧拉图，当且仅当图 G **连通**且**所有顶点的度都是偶数**。

证明. 首先证明必要性。因为图G存在欧拉路径且没有孤立点，所以任意两个点都可以相互到达，图G一定是连通图。如果图G存在回路 $v_0, v_1, ..., v_{m-1}, v_0$，那么对于顶点 $v_i(i = 0, 1, 2, 3, ..., m-1)$ 来说，有一条进入 v_i 的边就有一条从 v_i 引出的边，所以与 v_i 相邻的边总是成对的，得到 v_i 的度为偶数。因此，如果图 G 存在欧拉回路，那么图 G 为连通图且所有顶点的度都是偶数。

接着我们来说明充分性。从 G 中任意顶点 v_0 出发，经关联的边 e_1 进入 v_1，因为 v_1 的度数是偶数，一定可以由 v_1 再经关联的边 e_2 进入 v_2，如此继续下去，每条边仅经过一次，经过若干步后必可回到 v_0，于是得到了一个圈 c_1。如果 c_1 恰是图 G，则命题得证。否则在 G 中去掉 c_1 后得子图 G_1， G_1 中每个顶点也是偶顶点，又因为图 G 是连通的，所以在 G_1 中必定存在一个和 c_1 公共的顶点 u，在 G_1 中存在一个从 u 出发，到 u 结束的圈 c_2，于

是 c_1 和 c_2 合起来仍是一个回路。重复上述过程，因为G 中总共只有有限条边，总有一个时候得到的图恰好是 G 。

对于存在奇顶点的图，我们可以利用以下结论求出最少笔画数：

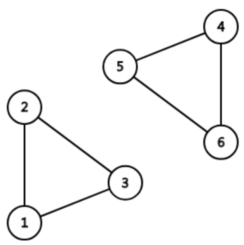
定理 2.2. 如果无向连通图有 $2k$ 个奇顶点，则图 G 可以用 k 条路径将图 G 的每一条边经过一次，且至少要使用 k 条路径。

证明. 我们先来证明路径条数的下界。设图 G 可以分解成 h 条链，每条链上至多有两个奇顶点，所以有 $2h \geq 2k$ ，即 $h \geq k$ 。因此 k 是路径数量的下限。

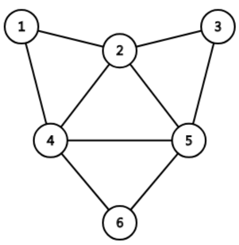
接下来我们只需要构造一组方案。把这 $2k$ 个奇顶点分成 k 对 (v_1, v_1') , (v_2, v_2') , $\ldots$, (v_k, v_k') 。在每对点 (v_i, v_i') 之间添加一条边，得到图 G' 。图 G' 连通且没有奇顶点，所以 G' 存在欧拉回路。再把这 k 条新添的边从回路中去掉，这个圈至多被分为 k 段，我们就得到了 k 条链。这说明图 G 是可以用 k 条路径将图 G 的每一条边经过一次的。

综合上述两个定理，我们已经了解了欧拉回路与欧拉路径存在的充要条件。我们可以由此推导出半欧拉图的判定条件：

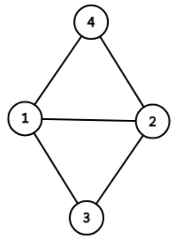
定理 2.3. 无孤立点的无向图 G 为半欧拉图，当且仅当图 G 连通且 G 的奇顶点个数为 2 。此时两个奇顶点分别为欧拉路径的起点和终点。



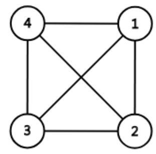
(a)不是连通图



(b)欧拉图



(c)半欧拉图



(d)不是欧拉图，也不是半欧拉图

图1：欧拉图与半欧拉图的图示

2.2 有向欧拉图

对于有向图我们可以通过同样的思路得到类似的结论。因其证明思路与无向图基本相同，证明过程从略。

定理 2.4. 无孤立点的有向图 G 为欧拉图，当且仅当图 G 弱连通且所有顶点的入度等于出度。

定理 2.5. 对于连通有向图，所有顶点入度与出度差的绝对值之和为 $2k$ ，则图 G 可以用 k 条路径将图 G 的每一条边经过一次，且至少要使用 k 条路径。

定理 2.6. 无孤立点的有向图 G 为半欧拉图，当且仅当图 G 弱连通，且恰有一个顶点 u 入度比出度小 1 ，一个顶点 v 入度比出度大 1 ，其余顶点入度等于出度。此时存在 u 作为起点， v 作为终点的欧拉路径。

3 欧拉回路的生成

既然我们已经了解了欧拉图与半欧拉图的判定方法，那如何在欧拉图中求出一条欧拉回路呢？我们接下来考虑如下问题：

问题 3.1. 给定无向欧拉图 $G = (V, E)$ ，求出图 G 的一条欧拉回路。

本节中我们将介绍Fluery算法与Hierholzer算法来解决此问题。[4]

3.1 Fluery算法

3.1.1 算法简介

想要求出一条欧拉回路，最直接的想法就是依次确定回路上的每一个点。那么我们需要保证的是，在未访问边构成的子图中，当前路径的终点到起点是存在欧拉路径的。

我们用 p_k 表示经过 k 条边时的当前路径，未访问边构成的子图为 G_k 。图 G_k 由图 G 删除路径 p_k 得到，除了 v_0 与 v_k 之外所有点度均为偶数。所以只要图 G_k 除去孤立点是连通的，那么 G_k 一定存在一个 v_k 到 v_0 的欧拉路径。

我们接下来要考虑如何选择路径中的下一个点，使得未访问边构成的子图是连通的。初始时，图 G 存在欧拉回路。假设 G_k 是连通的，因为 v_k 是欧拉路径的端点，所以 v_k 的关联边中最多只有一条桥边。若 v_k 有多条关联的未访问边，一定可以找到一条非桥边作为下一条访问边。图 G_{k+1} 由图 G_k 删除一条非桥边（或 v_k 的最后一条边）得到，图 G_{k+1} 除去孤立点外一定连通。

换句话说，若当前点的出边中未访问的边不只一条，我们应该选择一条不是桥的边，作为下一条访问边。如此反复，最终就能得到一条欧拉回路。

3.1.2 算法流程

1. 任取 G 中的一个顶点 v_0 ，令 $p_0 : v_0$ 。

2. 记当前求出的路径 $p_k : v_0, v_1, ..., v_k$ 。若 v_k 只有一条未删除的出边 (v_k, u) ，则令 $v_{k+1} = u$ 。否则找到一条未删除的边 (v_k, u) ，使得在删去 (v_k, u) 后， u 仍然能到达 v_k ，令 $v_{k+1} = u$ 。删去边 (v_k, v_{k+1}) ，将 v_{k+1} 加入当前路径得到 p_{k+1} 。

3. 重复(2)直到不能进行为止，此时的路径 p_m 即为一条欧拉回路。

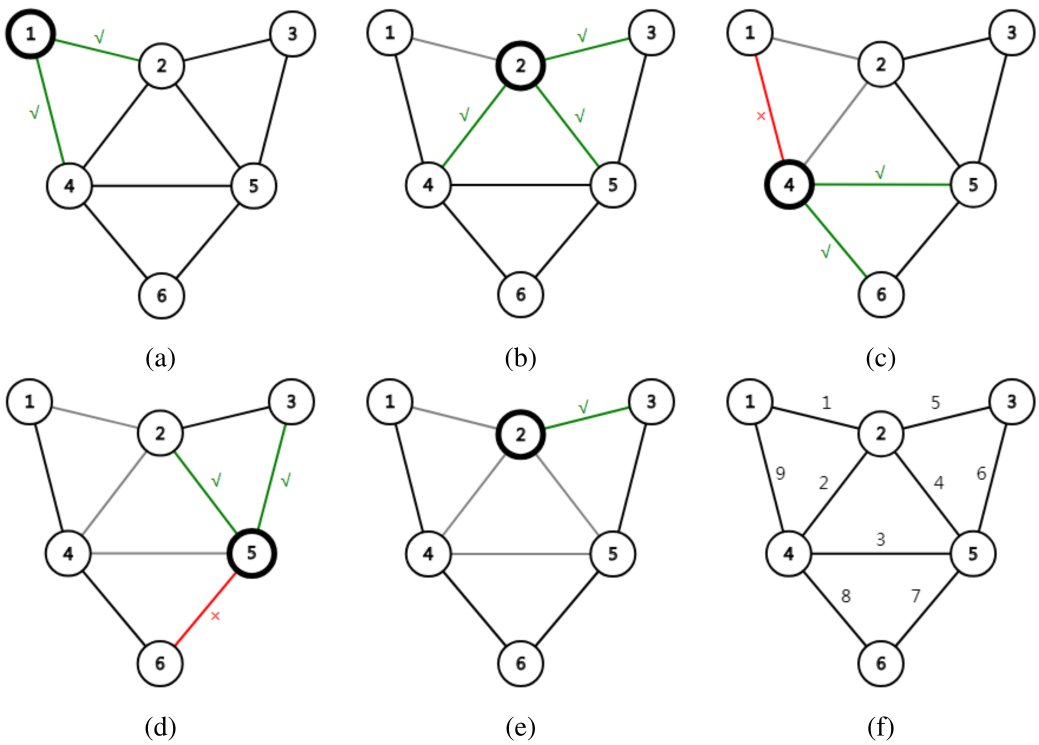


图2：Fleury算法的执行过程

图2(a)-(e)展现了Fleury算法的执行过程，其中绿色表示可以作为下一条访问边，红色表示不可以作为下一条访问边。图2(f)表示在这个例子上Fleury算法得到的最终结果。

3.1.3 伪代码

根据上面的描述，这个算法的实现如算法1所示。其中 u 为给定的起点， $path$ 为求出的欧拉回路。

我们可以使用链表维护边（无向边用两条反向的有向边表示），加入（或删除）时同时加（或删）两条边，并通过DFS（或BFS）判断连通性。在这种实现方式下，Fluery算法的时间复杂度为 $O(m^2)$ 。

算法 1 FLEURY(u)

```
size ← 0
while u 存在未被删除的无向边 (u, v) do
    path[size] ← u
    size ← size + 1
    删除无向边 (u, v)
    if u 还有未被删除的边且 v不能到达u then
        加入无向边 (u, v)
        continue
    end if
    u ← v
end while
path[size] ← u
size ← size + 1
```

3.1.4 算法分析与扩展

虽然该算法的效率不及下文将要介绍的同类算法，但由于该算法求解路径的方式十分直接，所以可以用来处理一些其他算法不能求解的问题。例如：

问题 3.2. 给定无向欧拉图（半欧拉图） $G = (V, E)$ ，求出图G的所有不同的欧拉路径。

解法. 在确定起点后，进行递归搜索，若当前点有多条未访问的关联边，则在回溯时依次尝试所有非桥边作为下一条访问边。直到所有边都已访问过，我们就得到了一条欧拉路径。最终我们就不重复地枚举出了所有欧拉路径。

在一些情况下，欧拉路径的数量很多，所以这一方法并不适合解决欧拉回路的计数问题。我们将在后面章节介绍的欧拉回路计数问题的计算方法。

3.2 Hierholzer算法

3.2.1 算法简介

该算法也被称作“套圈算法”或“DFS法”。因为效率高、代码短等优势，该算法成为信息竞赛中最常用的欧拉路径算法。

该算法的思路与定理2.1的构造思路基本相同。任选一起点，沿任意未访问的边走到相邻节点，直至无路可走。此时必然回到起点形成了一个回路，此时图中仍有部分边未被访问。在退栈的时候找到仍有未访问边的点，从该点为起点求出另一个回路，将该回路与之前求出的回路拼接。如此反复，直至所有的边都被访问。

3.2.2　算法流程

1. 任取 G 中的一个顶点 v_0，将 v_0 加入栈 S。
2. 记栈 S 顶端元素为 u，若 u 不存在未访问的出边，将 u 从栈 S 中弹出，并将 u 插入路径 P 的**前端**。否则任选一条未访问的出边 (u, v)，将 v 加入栈 S。
3. 重复(2)直到栈 S 为空，此时 P 为所求得的欧拉回路。

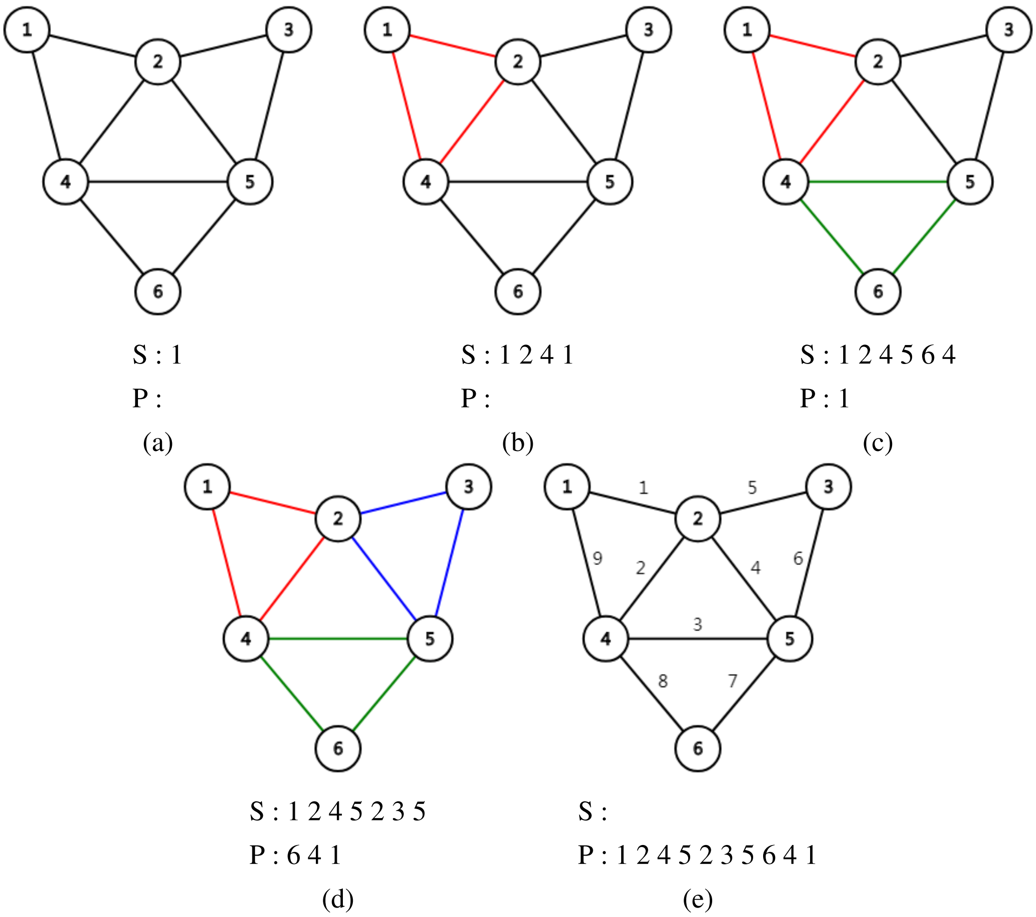


图3：Hierholzer算法的执行过程

图3(a)-(d)展现了Hierholzer算法的执行过程，不同颜色表示在执行过程中找到的不同回路。图3(e)表示在这个例子上Hierholzer算法得到的最终结果。

3.2.3　伪代码

根据上面的描述，这个算法的递归实现由算法2所示。其中 u 为给定的起点，*path* 的**反序**为求出的欧拉回路。

算法 2 HIERHOLZER(u)

```
while u 存在未被删除的无向边 (u, v) do
    删除无向边 (u, v)
    HIERHOLZER( v )
end while
path[size] ← x
size ← size + 1
```

我们可以使用链表维护边（无向边用两条反向的有向边表示），删除时同时删去两条边。Hierholzer算法的时间复杂度为 $O(m)$ 。

这个算法也可以很容易地按照算法流程中描述的方式改成非递归形式。

3.2.4　算法分析与扩展

该算法同样可以解决有向图的情况与求解欧拉路径：

问题 3.3. 给定有向欧拉图 $G = (V, E)$ ，求出图 G 的一条欧拉回路。

解法. 对于有向图，只需用链表维护有向边即可，删除时只需删除一条边。

问题 3.4. 给定无向（或有向）半欧拉图 $G = (V, E)$ ，求出图 G 的一条欧拉路径。

解法. 对于包含两个奇顶点的无向图，以任意一个奇顶点作为起点。对于有向图，找到入度比出度小 1 的顶点作为起点。使用上述算法就可以得到一条欧拉路径。此时，算法的执行过程就是将一条路径与多个回路依次合并。

我们还可以使用该算法求解对字典序有要求的问题：

问题 3.5. 给定无向（或有向）欧拉图（或半欧拉图） $G = (V, E)$ ，求出图 G 的一条字典序最小的欧拉回路（路径）。

解法. 我们对每个点 u 关联的出边 (u, v) 按照 v 排序，找到图中编号最小的可作为起点的点出发，每一次走到编号最小的相邻节点 v 。在算法执行过程中，先会找到包含起点的一个字典序最小的回路（或路径）。从后向前找到一个仍有未访问边的节点，将一个包含该点的字典序最小的回路拼接到已求得的回路（或路径）中。如此反复就能得到字典序最小的回路（或路径）。

问题 3.6. 给定无向（或有向）连通图 $G = (V, E)$ ，求出最少的路径将图 G 的每一条边经过一次。

解法. 这一问题在定理2.2中已经给出了构造方案，对奇点两两配对，在每对点之间加入一条边构成欧拉图。求出新图的欧拉回路，将回路从新加入的边处断开，就得到了 k 条路径。

4 欧拉图相关的性质

通过2、3两节的介绍，我们对欧拉图的判定方法和欧拉回路的生成有了一定了解。下面我们通过解决一些实际问题，分析欧拉图的相关性质。

定理 4.1. 对于任意无向连通图 G ，一定存在回路使得每条边经过恰好两次。进一步地，存在回路使得每条边的两个方向各经过一次。

证明. 我们将图 G 的每一条边重复两次，得到无向图 G_1 。 G_1 是连通图，且所有点的度都是图 G 中对应点的度的两倍。因此 G_1 是欧拉图，存在欧拉回路。

同理，若把图 G 的每条无向边变为两条反向的有向边，得到有向图 G_2 。 G_2 也存在欧拉回路，满足图 G 每条边的两个方向各经过一次。

例题 4.1. 给定 n 个点， m 条边的无向连通图。其中 $m-2$ 条边经过两次，余下的两条边各经过一次，经过次数为一次的两条边不同就认为是不同的路径，问有多少种不同的路径。满足 $n, m \leq 10^6$ 。[76]

解法. 将图 G 中所有的边重复两次得到图 G' 。现在需要从 G' 中删去两条不同的边，使其存在欧拉路径，满足奇顶点个数为 0 或 2 。满足条件的只有以下三种组合方式：（1）删去的两条边都是自环。（2）删去的两条边中恰有一条为自环。（3）删去的两条边均不是自环，但有公共点。分别计算方案即可求出答案。时间复杂度为 $O(n+m)$ 。

定理 4.2. 对于无向图 G ，所有顶点的度都是偶数等价于图 G 有圈分解。圈分解即为用若干个圈（不重复经过顶点的回路）使图G的每一条边恰经过一次。

证明. 这一定理我们其实在一开始介绍的定理2.1中就已经证明了，只是因为章节的侧重不同没有将这一定理提出。该定理也可以描述成点度均为偶数等价于存在回路分解。该定理揭示了所有点度为偶数的等价性表述，虽然看似简单，但往往在解题中经常用到。

例题 4.2. 给定 n 个点， m 条边的无向图，边有黑白两种颜色。现在你可以进行若干次回路反色操作，每次操作从任意点出发，每经过一条边，将其颜色反转，最后回到起点。判断能否通过若干次操作，使这张图所有边都变成白色。若可以，求出最少操作次数。满足 $n, m \leq 10^6$ 。[77]

[76]题目来源：Codeforces Round #407(Div. 1). B

[77]题目来源：BZOJ 3706

解法. 给定的无向图记为 G 。我们事先决定每条边的经过次数，将每条边按照经过次数重复，构成图 G' 。图 G' 是由若干条回路构成的，所以图 G' 的所有点必为偶顶点。为了使每条黑边变为白边，每条白边仍是白边，黑边必然经过奇数次，而白边经过偶数次。因此，图 G 中黑边构成的子图必然所有点为偶顶点，此时图 G' 才可以分解成若干条回路。若图 G 中黑边构成的子图存在奇顶点，则一定无解。

我们如何求出最少的操作次数呢？因为图 G' 的每个连通分量都是欧拉图，操作次数就是图 G' 的连通分量数（不考虑孤立点）。我们要在黑边构成的子图中加入白边，减少连通分量数。最直接的办法就是对于图 G 中包含黑边的连通分量，我们让路径对于每条黑边经过一次，白边经过两次。其余连通分量不经过。最少操作次数就是图 G 中包含黑边的连通分量数。时间复杂度为 $O(n+m)$ 。

定理 4.3. 对于不存在欧拉回路的图 G ，若最少用 a 条路径将图 G 的每一条边经过一次，若最少在图 G 中加入 b 条有向边使之成为欧拉图，则 a 一定等于 b 。

证明. 这一定理与定理2.2证明方法相同。加入 a 条有向边使路径收尾相接，可以得到欧拉回路，推得 $a \ge b$ 。在图 G 加入 b 条边得到的欧拉回路中删除这 b 条边，就得到了 b 条路径，推得 $b \ge a$ 。因此， $a = b$ 。这一巧妙的转换往往可以使解题容易不少。

例题 4.3. 给定 n 个点， m 条边的无向图。求最少添加多少条无向边后，使得图存在从 1 号点出发又回到 1 号点的欧拉回路。满足 $n, m \le 10^6$ 。[78]

解法. 如果从构造加边的方案入手，就会发现既要考虑消除奇顶点，又要考虑将不同连通分量连通，十分麻烦。我们就转换角度，考虑这个图需要几条路径才能使每一条边经过一次。不包含奇顶点的连通分量一定存在欧拉回路，计一条路径。包含奇顶点的连通分量，需要奇顶点个数除以 2 条路径。记奇顶点个数为 a ，不包含奇顶点的连通分量（不考虑孤立点）个数为 b 。路径总数为$\frac{a}{2}+b$ 条。我们还需要对原图为欧拉图， 1 号点为孤立点的情况做特殊处理。其余情况的答案为 $\frac{a}{2}+b$ 。时间复杂度为 $O(n+m)$ 。

5　欧拉图的生成问题

在解决实际的应用问题时，我们需要先在欧拉图性质的引导下，把问题转换为图论模型。再借助一些其他知识与算法将图论模型生成出我们所需要的欧拉图。在本节中，我们将通过几个例子介绍在欧拉图生成问题中的思路与技巧。

[78]题目来源：VK Cup 2012 Finals, Practice Session. C

5.1 De Bruijn序列

问题 5.1. 求出一个 2^n 位环形 0/1 串，满足所有 2^n 个长度为 n 的子串恰为所有 2^n 个的 n 位的 0/1 串。

解法. 每次将一个子串（顺时针）移动到相邻的下一个子串，相当于将原来的子串去掉最左边一位，并在最后加上 0 或者 1 。于是对于 0/1 串 $x_1x_2...x_n$ ，它的下一个子串可以变成$x_2x_3...x_n0$ 或者 $x_2x_3...x_n1$ 。

一个容易想到的思路是，将所有的0/1 串看作 2^n 个点，每个点连出有向边 $(x_1x_2...x_n, x_2x_3...x_n0)$ 与 $(x_1x_2...x_n, x_2x_3...x_n1)$ 。此时需要找到一条路径经过所有点恰一次，即哈密尔顿路。而求解哈密尔顿问题是是十分困难的。那么这个方法无法解决此问题，我们需要改变模型。

在之前的模型中我们是用点来表示 0/1 串，所以需要经过每一个点恰一次。如果我们用边来表示每一个 0/1 串呢？我们构造一个包含 2^{n-1} 个点和 2^n 条有向边的图。每个点表示一个 $n-1$ 位 0/1 串，即相邻两个子串相同的 $n-1$ 位。每一条有向边表示一个 n 位 0/1 串 $x_1x_2...x_n$ ，连接 $(x_1x_2...x_{n-1}, x_2x_3...x_n)$ 。这样，该图中的一条回路就对应了一个环形串，而我们希望能求出一条经过所有边的回路。容易发现，每一个点一定恰有两条入边和两条出边，且每两个点之间一定可以到达。所以该图是欧拉图，一定存在欧拉回路，也就存在满足要求的环形 0/1 串。

这一问题还可以扩展， 2 可以替换成任意正整数 k ， 0/1 串替换成 k 进制串。对于给定的 n 与 k ，满足上述条件的长度为 k^n 的环形k进制串称作De Bruijn序列。

例题 5.1. 一个保险箱有 n 位数字密码，正确输入密码后保险箱就会打开，目前输入的最后 n 位数字与密码相同就算正确输入密码。请求出一个长度为 10^n+n-1 字典序最小的数字序列，满足依次输入序列的每一位数字，一定可以打开保险箱。满足 $n \leq 6$ 。[79]

解法. 可以发现该本题与上述问题的本质是一样的，唯一不同的是环形串改为了数字串，需求从欧拉回路变为了欧拉路径。建模方式基本不变，我们需要 10^{n-1} 个点，表示相邻数字串的连接点。共 10^n 个需要被包含的数字串，每个数字串对应一条有向边。因为该图是欧拉图，我们需要求出该图的一条欧拉路径，满足产生的数字序列字典序最小。对于本题来说，就是求出字典序最小的欧拉回路。我们选择数值最小的点作为起点，使用求字典序最小的欧拉路径的方法即可求出满足题意的答案。时间复杂度为 $O(10^n)$ 。

5.2 混合图欧拉回路

问题 5.2. 给定包含有向边与无向边的弱连通图 $G = (V, E)$ ，判断图G是否为欧拉图。若存在，请求出一条欧拉回路。

[79]题目来源：POJ 1780

解法. 判定混合图是否为欧拉图不是一个容易的问题，如果能够把问题转化为熟悉的有向图就容易解决了。在混合图 G 中，为每一条边 (u, v) 确定一个方向，就得到了一个有向图。如果该有向图每个点的入得均等于出度，那么该图一定存在欧拉回路。

而随意定向显然不能满足度数要求，但我们可以在此基础上进行调整。我们先对每个点 u 求出出度减去入度的值 $s(u)$ 。反转一条已指定方向 $u \to v$ 的无向边 (u, v) ，会使 $s(u)$ 减小 2 ， $s(v)$ 增大 2 。最终我们希望使每个点入度等于出度，即对于每个点 u ，满足 $s(u) = 0$ 。

这一问题可以看做多源汇的最大流模型。把 $s(u)$ 大于 0 的点看做供给，而 $s(u)$ 小于 0 的点看做需求，每条边有容量上限，我们可以通过网络流算法求解。具体的建图方式如下：对于点 u ，若 $s(u) > 0$ ，则从源点向 u 连容量为 $|\frac{s(u)}{2}|$ 的边；若 $s(u) < 0$ ，则从u向汇点连容量为 $|\frac{s(u)}{2}|$ 的边。对于每条无向边，按照定向的方向连边，容量为 1 。求出该图源点到汇点的最大流。若在源点连出的边中存在未满流的边，根据最大流的性质，说明不存在方案使得所有点入度等于出度，故原图不是欧拉图。

若原图为欧拉图，若无向边 (u, v) 对应的边在最大流中流量为1，则将原来指定的方向 $u \to v$ 改为 $v \to u$ 。这样，我们得到了图 G 的欧拉定向，满足所有点的入度等于出度。利用有向图欧拉回路生成算法即可求出图 G 的欧拉回路。

5.3 中国邮递员问题

问题 5.3. 给定**有向带权**连通图 $G = (V, E)$ ，求出一条总边权和最小的回路，使得经过每一条边至少一次。

解法. 这道题目看起来比较复杂，我们可以先考虑一些简单情况。如果给定的图 G 是欧拉图，显然不需要重复走任意一条边，欧拉回路就是符合要求的路线。如果图G为半欧拉图，存在从 v_1 到 v_2 的一条欧拉路径 P ，那么我们需要加入一些重边使得图中的所有点入度等于出度。最优方案是找到一条从 v_2 到 v_1 的最短路 Q ，将 P 与 Q 拼接就得到了一条符合要求的路线。

通过以上的分析可以看出，本题的实质是在图 G 中增加一些重复边，使新图的每个点入度等于出度，并且增加的重复边总边权和最小。我们先对每个点 u 求出入度减去出度的值 $s(u)$ 。如果将一条边 (u, v) 重复一次，就会使得 $s(u)$ 减小 1 ，而 $s(v)$ 增加 1 ，同时产生边权的代价。这就是一个多源汇的最小费用最大流模型。具体的建图方式如下：对于点 u ，若$s(u) > 0$ ，则从源点向 v 连容量为 $|s(u)|$ ，费用为 0 的边；若 $s(u) < 0$ ，则从 u 向汇点连容量为 $|s(u)|$ ，费用为 0 的边。对于每条图 G 中的有向边 (u, v) ，则从 u 向 v 连一条容量为正无穷，费用为该边边权的边。求出该图源点到汇点的最小费用最大流。若在源点连出的边中存在未满流的边，则图 G 不存在每条边至少经过一次的回路。

若存在方案，图G的边权和加上求出的最小费用就是该方案的总边权。对于每条边 (u, v) ，对应的边在最大流中的流量，就是该边需要额外重复的次数。可以利用有向图欧拉回路

算法求出符合要求的路径。

我们可以对应地给出该问题的无向图版本，可以通过同样的方式分析此题。

问题 5.4. 给定**无向带权**连通图 $G = (V, E)$ ，求出一条总边权和最小的回路，使得经过每一条边至少一次。

解法. 无向图可以类比有向图的解法。我们要在图 G 中增加一些重复边，使新图的每个点都成为偶顶点，并且增加的重复边总边权和最小。若图中有 $2k$ 个奇顶点，则我们要加入 k 条以奇顶点为端点路径。每个点最多只会为一条路径的端点，否则我们可以将两条路径合并为一条。每一条路径必然选取两个端点间的最短路。因此，我们需要将 $2k$ 个奇顶点分为 k 对，使得每对点的最短路长度之和最小。我们要求出一个最小权完美匹配，这可以通过一般图最小权完美匹配算法求解。

6 欧拉图相关的计数

计数问题是图论中一类重要的问题。欧拉图，代表了点度为偶以及连通这两个条件。两个简单的条件却产生了很多有趣的计数问题。在本节的介绍过程中，我们将会利用上文中得到的欧拉图的相关性质，构造有利于我们求解的模型，最后使用我们熟知的方法得到答案。我们将通过几个经典的例子，探究欧拉图相关的计数问题的常用方法，并提出一些有用的结论。

6.1 欧拉图计数

问题 6.1. 给定 n ，求包含 n 个点的所有点度为**偶数**的有标号简单无向图个数。

解法. 为了方便表示，记 s_n 表示 n 个点所有点度为偶数的有标号简单无向图个数。除去 n 号点以及 n 号点关联的边，此时其余这 $n-1$ 个点中必然有偶数个奇顶点，那么 n 号点就必须与这偶数个奇顶点各连一条边。我们只需求 $n-1$ 个点包含偶数个奇顶点的简单无向图的个数。而任意一个无向图中奇顶点的个数一定是偶数， s_n 就是 $n-1$ 个点简单无向图的数量，$n-1$ 个点之间有 C_{n-1}^2 个点对可以连边，所以 $s_n = 2^{C_{n-1}^2}$ 。

问题 6.2. 给定 n ，求包含 n 个点的有标号简单连通无向**欧拉图**个数。

解法. 记 f_n 为问题所求的 n 个点的有标号简单连通无向欧拉图个数。同时处理连通与度为偶数两个约束较为困难，但我们在前面已经解决了度为偶数的问题。接下来，我们利用容斥原理的思路解决连通这一限制。 f_n 等于 s_n 减去不连通的方案数。而不连通的方案数可以通过枚举 1 号点所在连通分量大小计算。当连通分量大小为 i 时，该连通分量内点的集

合有 C_{n-1}^{i-1} 种不同组合方式，这些点之间的连边方法有 f_i 种，剩余点之间就不需要保证连通性了，有 s_{n-i} 种连边方法。公式如下：

$$f_n = s_n - \sum_{i=1}^{n-1} C_{n-1}^{i-1} f_i s_{n-i}$$

运用该递推公式可以在 $O(n^2)$ 的时间内求出答案。当然，也可以运用CDQ分治+FFT或是多项式求逆等优化技巧得到 $O(n\log^2 n)$ 或 $O(n\log n)$ 的更高效率的解法。

6.2 欧拉子图计数

问题 6.3. 给定一个**无向连通**图 $G = (V, E)$ ，求有多少个支撑子图 $G' = (V, E'), E' \subseteq E$ ，满足每个顶点的度都是偶数。

解法. 这个图论问题不好直接入手，我们可以将这个问题可以转化为代数问题。用变量表示每条边选或不选，再把度的约束转化为等式，这样可以列出一组方程描述此问题。对于标号为 i 的边，这条边是否出现在子图中用 0/1 变量 x_i 表示。对于点 v ，与 v 关联的边分别为 $e_1, e_2, ..., e_d$ ，这些边在子图中出现的条数必为偶数，得到 x_{e_1} xor x_{e_2} xor ... xor $x_{e_d} = 0$ ，其中 xor 表示异或运算。由此我们得到了 n 个等式， m 个变量的异或方程组。通过高斯消元算法，我们可以求出该方程组的自由元的数量s ，则满足题意的子图数量为 2^s 。这一解法的时间复杂度为 $O(n^2m)$ 。

上述方法虽然已经解决了本问题，但在转化为代数模型的过程中，我们忽略了一些图自身的性质，例如图 G 是连通的，每一条边所代表的变量只在方程组中出现了两次。那么，我们能否利用这些性质得到更简便的解法呢？

我们任意求出图 G 的一棵生成树，将该生成树上的边对应的变量作为主元，此时非树边所对应的变量恰为自由元。我们可以找到这一过程的组合意义。依次决定每条非树边是否选择，容易发现，对于一组非树边的选法，树边只有唯一的选法。我们任意指定一个点为根，按照从叶子到树根的顺序依次决定每个点与其父亲间的树边是否选择。所以，一组非树边变量的取值，就对应了一组方程的解。

事实上，若把一条非树边与其两端点在树上的路径看做该树边所代表的环，将所有选择的非树边代表的环异或（一条边出现奇数次则选择，否则不选择），就得到了一个满足条件的子图。我们可以很容易表示出满足条件的子图的数量为 2^{m-n+1} 。

我们还可以将该问题扩展到一般的无向图：

问题 6.4. 给定一个**无向**图 $G = (V, E)$ ，求有多少个支撑子图 $G' = (V, E'), E' \subseteq E$ ，满足每个顶点的度都是偶数。

解法. 容易发现，不同的连通分量之间是独立的。若图的连通分量数量为 c ，对每一个连通分量使用上述公式，得到满足顶点为度为偶数的支撑子图数量为 2^{m-n+c} 。可以发现这一

数值与每一连通分量内部边的连接方式无关，在 $O(n+m)$ 的时间内就可以求出 c，计算出本题的答案。

6.3 欧拉回路计数

问题 6.5. 给定一个**有向**欧拉图 $G=(V,E)$，求以 1 号点为起点的欧拉路径的数量。

解法. 我们先来提出一种构造方案。找到一棵以 1 号点为根的内向树（即每个点有唯一的一条路径到达 1 号点），对于一个点的所有不在树上的出边指定一个顺序。接下来，我们来证明上述的方案与欧拉路径一一对应。

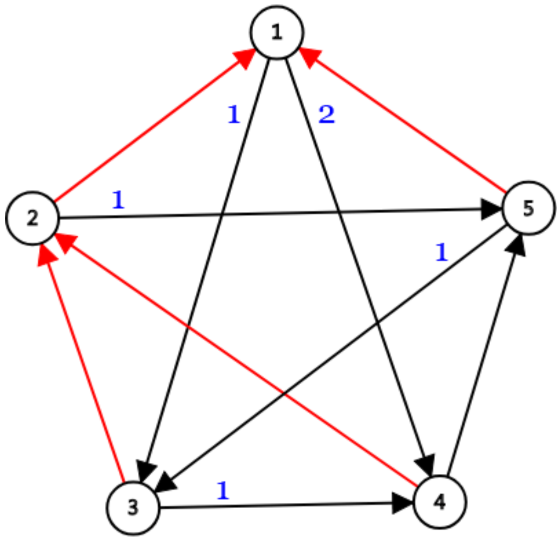


图4：一个构造方案的例子

先证明一个方案唯一对应一条欧拉路径。对于一个方案，我们从 1 号点出发，对每一个点，按照非树边指定的顺序走，若所有的非树边都走过，则走树边。这样走出了一条路径，我们现在来证明，这条路径就是一条欧拉路径。回顾Fleury算法的执行过程，只需证明走一条非树边 (u,v) 的时候 u 与 v 在树上是弱连通的。如果一个点有未访问的出边，则这个点出发的树边一定未访问过。走一条非树边 (u,v) 的时候，u 与 v 的树边都未访问过，它们的父亲节点出发的树边一定也未访问过。以此类推，它们到根节点的路径的每一条边都未访问过。因此，走一条非树边 (u,v) 的时候 u 与 v 在树上是弱连通的。按照上述方式得到的路径一定是欧拉路径。

再证明一条欧拉路径唯一对应一个方案。对于以 1 号点为起点和终点的欧拉路径，除 1 号点外的每个点最后访问的出边是"树边"，其余出边按照访问次序确定顺序，便得到一个上述方案。需要证明得到 $n-1$ 条"树边"中不存在环。我们可以反证，假设"树边"形成了环，由于 1 号节点不选择树边，环上不存在一号节点。我们任选环上一点出发，沿着"树

边”走，最后又回到了这个点。因为树边为最后访问的一条边，因此欧拉路径终止于该点了，这与欧拉路径的终点为 1 号点矛盾。

这样我们就证明了方案与欧拉路径一一对应。接下来，我们来考虑“方案”的数量。对于图 G ，记 T_i 为以 i 为根的内向树的数量， d_i 为 i 号点的出度。对于一棵内向树，与1 号点关联的出边有 $d_1!$ 种，其余节点 i 对非树边指定顺序，有 $d_i!$ 种。以 1 号点为起点和终点的欧拉路径的数量为：

$$T_1 d_1! \prod_{i=2}^{n} (d_i - 1)!$$

其中 T_1 可以利用矩阵树定理求出。即出度矩阵减去邻接矩阵去掉第一行第一列后行列式的值。时间复杂度为 $O(n^3)$ 。

问题 6.6. （BEST 定理）给定一个有向欧拉图 $G = (V, E)$ ，求欧拉回路的数量。

解法. 我们可以通过同样的方式求出不同欧拉回路的数量，即不考虑起点，路径循环同构。为了避免重复计算同一种欧拉回路，我们需要将一个欧拉回路转化为唯一的一条欧拉路径，即从 1 号点出发的标号最小的边作为第一条访问边。我们就能够得到不同的欧拉回路的数量：

$$T_1 \prod_{i=1}^{n} (d_i - 1)!$$

这一数量关系由de Bruijn、van Aardenne-Ehrenfest、Smith和Tutte四人提出，称为BEST定理 [5] 。从这个公式中，我们还可以看出有向欧拉图具有 $T_1 = T_2 = ... = T_n$ 的性质。

问题 6.7. 给定一个有向半欧拉图 $G = (V, E)$ ，求欧拉路径的数量。

解法. 对于不好处理的半欧拉图问题，最直接的办法就是通过加边转化为欧拉图问题。我们在半欧拉图中添加一条有向边，将半欧拉图 G 变为欧拉图 G' 。那么，图 G' 中的欧拉回路就与图 G 中的欧拉路径一一对应。利用BEST定理给出的公式，计算图 G' 的欧拉回路的数量，就可以算出图 G 的欧拉路径的数量。

那么我们能否求出无向欧拉图中的欧拉回路数量呢？遗憾的是这一问题十分困难，已经被证明为`#P-complete`问题，目前没有多项式复杂度的解法。

7 总结

欧拉图问题是图论中十分重要的一类问题。本文从欧拉图本质分析着手，介绍了欧拉图的判定方法和欧拉回路的生成算法。在分析性质和设计算法的过程中，图的连通性与顶点的度起到了关键的作用，这两个要素是我们分析欧拉图问题的基础。以这两个要素入手，我们总结出了更一般的结论与解题思路。

运用欧拉图模型可以解决一些应用问题。本文分析了两种常见的解题思路。一是对于表面上看似是哈密尔顿问题的题目，不妨考虑一下将边与点的关系对调，转化为欧拉图问题。二是对于构造或贪心难以处理的欧拉图生成问题，可以考虑将约束转化为网络流模型或其它经典问题。模型转化往往是这类题目的突破口。

欧拉图的计数问题与生成问题类似，需要灵活运用模型转化，基于欧拉图性质分析，构造组合意义，抽象出代数模型，并且善用计数技巧进行解决。

总而言之，深入理解欧拉图相关性质，灵活运用模型转化，巧妙借助其他知识与算法，是解决欧拉图相关问题的关键。希望本文可以起到抛砖引玉的作用，使更多人了解并继续发掘欧拉图问题的奥秘。

致谢

- 感谢中国计算机学会提供学习和交流的平台。
- 感谢北师大实验中学的胡伟栋老师多年来的关心与指导。
- 感谢为本文审稿和提出建议的同学们。
- 感谢所有对我有过帮助的老师和同学。

参考文献

[1] 仇荣琦，《欧拉回路性质与应用探究》，IOI2007国家集训队论文

[2] 熊斌, 郑仲义，《数学奥林匹克小丛书：图论》，华东师范大学出版社

[3] Herbert Fleischner, Eulerian Graphs and Related Topics. Part 1, Vol.2

[4] 欧拉路径的英文维基百科，
`https://en.wikipedia.org/wiki/Eulerian_path`

[5] BEST定理的英文维基百科，
`https://en.wikipedia.org/wiki/BEST_theorem`